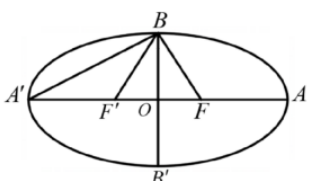
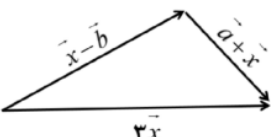




ردیف	سؤالات	بارم
فصل اول		
۱	الف) اگر A ماتریس اسکالر و B ماتریس هم‌مرتبه A باشد، آنگاه حاصلضرب آنها تعویض پذیر است. درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/> ب) اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $A^{14 \cdot 2} = I$. درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/> ج) دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ برابر است. د) از تساوی ماتریسی $A \times B = A \times C$ که در آن A یک ماتریس مربعی است، با شرط نتیجه می‌شود $B = C$.	۱/۵
۲	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} -1 & i-j > 1 \\ 0 & i-j = 1 \\ 1 & i-j < 1 \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^T - 2I$ را به دست آورید.	۱/۵
۳	اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $ A^T = -8$ باشد، حاصل $\frac{ A^{-1} }{ 3A }$ را بیابید.	۱
۴	دستگاه معادلات $\begin{cases} 3x + 7y = -4 \\ -5x + 2y = -7 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۱
۵	به ازای چه مقادیر از m دستگاه معادلات $\begin{cases} -4x + (m-3)y = 3 \\ 2x - \frac{m-3}{2}y = 1 \end{cases}$ یک جواب منحصر به فرد دارد.	۱
فصل دوم		
۶	دایره‌هایی که مرکز آنها روی سهمی به معادله $(y-1)^2 = -8(x+1)$ واقع است و از کانون سهمی می‌گذرند، بر خط به معادله مماس هستند.	۰/۵
۷	دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروضند، نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.	۱/۲۵
۸	وضعیت دایره به معادله $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 20 = 0$ ، نسبت به دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۳ واحد را مشخص کنید.	۱
۹	معادله دایره‌ای را بنویسید که خط‌های $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطره‌هایی از آن باشند و روی خط به معادله $x+y=2$ وترى به طول $2\sqrt{2}$ ایجاد می‌کند.	۱

بارم	سؤالات	ردیف
۱	نقاط $B(-1, 2)$ و $B'(-1, -4)$ دو سر قطر کوچک یک بیضی با فاصله کانونی $2\sqrt{3}$ واحد است. طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.	۱۰
۱	 <p>یک بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبرو مفروض است. اگر $4S_{\triangle FBF'} = S_{\triangle BA'O}$ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.</p>	۱۱
۱	معادله سهمی را بنویسید که خط هادی آن $y = -2$ و کانون آن $F(1, -4)$ باشد.	۱۲
۱/۲۵	یک شعاع نورانی در امتداد خط $x = 4$ بر سهمی $x^2 = 8y$ می‌تابد. معادله خط بازتاب را بنویسید.	۱۳

فصل سوم

۱/۲۵	<p><input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>الف) خط به معادله $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ بر صفحه xOz عمود است.</p> <p>ب) معادله صفحه‌ای که موازی صفحه yOz است و از نقطه $A(2, -1, 3)$ می‌گذرد، برابر با است.</p> <p>ج) حاصل عبارت $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k})$ برابر است.</p> <p>د) در شکل زیر بردار \vec{x} برحسب \vec{a} و \vec{b} برابر با است.</p> 	۱۴
۱/۵	اگر $\vec{a} = -\vec{i} - \sqrt{3}\vec{k}$ و $\vec{b} = (\sqrt{3}, 2, 1)$ باشد. تصویر قائم بردار \vec{b} بر \vec{a} و اندازه بردار تصویر را به دست آورید.	۱۵
۱/۷۵	اگر مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای \vec{a} و \vec{b} ساخته می‌شود $6\sqrt{3}$ باشد و $ \vec{a} = 4$ ، $ \vec{b} = 3$ ، حاصل $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ را به دست آورید.	۱۶
۱/۵	دو بردار $\vec{a} = (-m, -1, -2)$ و $\vec{b} = (0, -3, m+2)$ مفروض‌اند. اگر دو بردار $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{a} + \vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای \vec{a} و \vec{b} و $\vec{a} \times \vec{b}$ ساخته می‌شود را بدست آورید.	۱۷



پاسخنامه

۸- (ص ۴۶) $O(۳, -۶), R=۵$
 $O'(۰, ۰), R'=۳$
 دو دایره متقاطع هستند.

۹- (ص ۴۶) $OO' = ۳\sqrt{۵}, |R-R'| < OO' < R+R' \Rightarrow$
 $\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \Rightarrow O(۲, -۱)$

۱۰- (ص ۴۸) $OH = \frac{۱}{\sqrt{۲}}, r^۲ = (\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲ + (\sqrt{۲})^۲ = \frac{۵}{۲}$
 $(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۵}{۲}$
 $BB' = ۲b = ۶ \rightarrow b = ۳$

$۲c = ۲\sqrt{۳} \rightarrow c = \sqrt{۳}$
 $a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۳^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = ۱۲$
 $\rightarrow a = ۲\sqrt{۳} \rightarrow AA' = ۲a = ۴\sqrt{۳}$

۱۱- (ص ۴۹) $\frac{S_{BB'O}}{S_{AA'O}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۲c \times b}{\frac{۱}{۲} \times a \times b} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۸}$

۱۲- (ص ۵۴) $S = (۱, -۳) \quad a = ۱ \Rightarrow (x-۱)^۲ = -۴(y+۳)$
 ۱۳- (ص ۵۶) خط بازتاب از کانون می‌گذرد.

$(x=۴ \rightarrow y=۲) \Rightarrow A(۳, ۲)$
 $(۴a=۸ \rightarrow a=۲) \Rightarrow F(۰, ۲), \quad y=۲$
 ۱۴- الف) نادرست $x=۲$ ب)
 ج) بردار صفر یا \vec{O} د) $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ (ص ۶۷ و ۸۲)

۱۵- (ص ۷۲) $\vec{a} = (-۱, ۰, -\sqrt{۳})$
 $\vec{b}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{-۲\sqrt{۳}}{۴} (-۱, ۰, -\sqrt{۳}) = (\frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰, \frac{۳}{۲}), |\vec{b}'| = \sqrt{۳}$

۱۶- (ص ۸۴) $|\vec{a} \times \vec{b}| = ۶\sqrt{۳}$
 $\sin \theta = \frac{۶\sqrt{۳}}{۴ \times ۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \rightarrow \cos \theta = \pm \frac{۱}{۲}$
 $a \cdot (a-b) = |\vec{a}|^۲ - \vec{a} \cdot \vec{b} = ۴^۲ - ۴ \times ۳ \times (\pm \frac{۱}{۲}) = ۱۶ \mp ۶$

الف) درست
 ب) نادرست
 ج) ۱۴
 د) وارون پذیری A یا $|A| \neq ۰$ (ص ۲۰ و ۲۸)
 ۲- (ص ۱۱)

۱- $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$
 $A^۲ - ۲I = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۳- (ص ۳۰) $|A^۲| = |A|^۲ = -۸ \Rightarrow |A| = -۲$

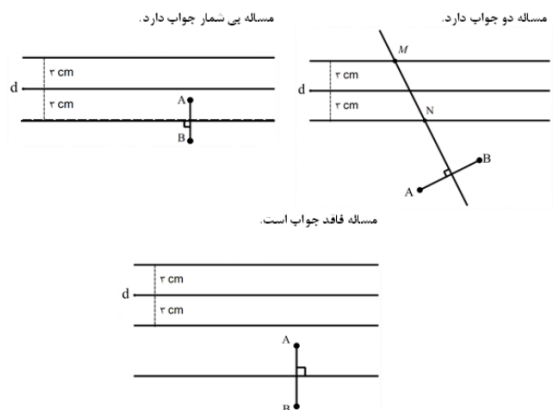
۴- (ص ۲۳) $\frac{|A^{-۱}|}{|۳A|} = \frac{\frac{۱}{|A|}}{۳^۲|A|} = \frac{۱}{۳۶}$

$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۴۱} \begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۴ \\ -۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$

۵- به ازای هیچ مقدار m (ص ۲۶)
 $\frac{-۴}{۲} \neq \frac{m-۳}{-(m-۳)} \Rightarrow -۲ \neq -۲$

۶- (ص ۵۸) $x=۱$

۷- مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ cm باشد، دو خط موازی d به فاصله ۳ cm از آن هستند. بنابراین نقطه برخورد عمودمنصف AB و دو خط موازی d ، جواب مسئله است. (ص ۳۸)





رشته: ریاضی

زمان: ۱۲۰ دقیقه

نوبت: خرداد ۱۴۰۳

تاریخ: ۱۴۰۳/۰۳/۱۳

نام و نام خانوادگی:

Gama

۱۷- بخش اول: (ص ۸۳) $(\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$

$$= 0 \Rightarrow \begin{cases} (-m, 2, -m-4) \cdot (-m, -4, m) = 0 \rightarrow m = -2 \\ |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \rightarrow m = -2 \end{cases}$$

بخش دوم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-6, 0, -6)$$

$$\Rightarrow h = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$V = Sh = |(\vec{a} \times \vec{b})|^2 = 72$$

